

ÉTUDE COMPARATIVE DES ARTICULATIONS DU JEU AU PIANO, AU METAPIANO ET AU MIDIFILEPERFORMER AU MOYEN DES S-LANGAGES

Myriam Desainte-Catherine

Univ. Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP,
LaBRI, UMR 5800, F-33400 Talence, France
myriam@labri.fr

Jean Haury, Bernard P.Serpette

SCRIME, Inria, Bordeaux
jeanhaury@gmail.com
Bernard.Serpette@inria.fr

Sylviane R. Schwer

USPN, CNRS, LIPN UMR 7030
F-93430 Villetaneuse, France
schwer@lipn.fr

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous modélisons de façon algébrique le fonctionnement du Metapiano et du MidiFilePerformer pour comparer leurs propriétés respectives en terme d'expressivité et de difficulté en faisant référence à celle du piano. Pour ce faire, nous utilisons une même partition pour donner concrètement tous les détails des articulations musicales permises par ces deux systèmes et nous quantifions un certain nombre de propriétés. Cette formalisation permet de montrer notamment que la principale différence entre les deux modèles réside dans le traitement des suspensions qui nécessite un peu d'informations spatiales pour le MidiFilePerformer.

1. INTRODUCTION

Les systèmes musicaux interactifs (SMI) Metapiano [8] et MidiFilePerformer [4] combinent le « hors-temps » d'une « partition interactive », (une séquence numérique de notes de musique), avec le « temps réel » des mouvements d'un musicien sur les touches d'un clavier. Le Metapiano n'utilise que quelques touches d'un clavier numérique quelconque. Il peut être joué par une main seulement, quelques doigts, voire avec un seul. Il intègre en sa mémoire les notes des partitions qu'il exécute sous les commandes expressives de l'interprète sur ses touches. Seules les hauteurs des notes sont codées et mémorisées en une structure ordonnée des relations mélodiques, harmoniques et contrapuntiques entre les notes. L'interprète n'ayant plus à sélectionner les hauteurs sur le clavier, met en sons la structure de hauteurs en jouant sur le nombre restreint de touches. Connaissant « d'oreille » la pièce à jouer, elle ou il en exécute rythmes, tempo, articulations, accents dynamiques et agogiques pour l'interpréter. Le MidiFilePerformer est l'application des principes du Metapiano aux fichiers MIDI, les innombrables partitions numériques téléchargeables en ligne. Ces midifiles sont séquencés pour être joués automatiquement en associant les timings des rythmes et des durées aux informations de hauteur des notes. Le MidiFilePerformer ne prend en compte que la séquence ordonnée « hors-temps » des hauteurs de notes du midifile faisant abstraction de leurs données temporelles. C'est au « performer » de gérer en

« temps réel » sur les touches d'un clavier numérique les rythmes, tempo, accents dynamiques et agogiques pour son interprétation. Les SMI présentés fonctionnent sur des transcriptions numériques d'une partition imprimée de référence. Le Metapiano utilise la structure atemporelle de hauteurs qui se suivent ou se superposent, le MidiFilePerformer agit sur la séquence de hauteurs sans rythmes ni durées du midifile. Dans les deux transcriptions on considère chaque note comme un intervalle temporel borné par un début et une fin ou suspension. La succession des notes met en relation la fin d'une note avec le début de la suivante. Selon le placement de la suspension, l'enchaînement des notes peut être fait selon trois modalités : la fin de note précède le début de la suivante, la fin est synchrone avec le début, la fin succède au début. Dans le premier cas la note s'arrête juste avant la suivante, introduisant un silence entre les deux notes. Dans le deuxième cas il y a contiguïté des notes, l'une se terminant au moment où l'autre commence. Dans le troisième cas la note s'arrête tout de suite après le début de la suivante, les notes se superposent un instant. Ainsi les enchaînements peuvent se faire détachés ou liés selon le mode de jeu de l'interprète sur les touches. Les compositrices et compositeurs classiques ont noté systématiquement en marge des notes de leurs partitions des signes d'articulation pour lier deux notes ou au contraire les détacher l'une de l'autre. Vers 1800, on peut lire dans une méthode de piano anonyme : « les notes liées sont réunies par un signe nommé coulé. . . Lorsqu'il réunit deux notes, la seconde note doit être entendue avant de quitter la première et perdre la moitié de sa valeur en silence. » Il y a donc un court chevauchement des deux notes et un silence d'articulation est introduit avant la prochaine note à venir. On verra dans la suite comment les signes d'articulation conditionnent l'espace de jeu entre suspensions et émissions de notes. Précisons que cet article se limite à l'étude des articulations et ne traite pas des infimes désynchronisations permises par le jeu pianistique car les SMI que nous étudions ici conditionnent la synchronisation exacte.

Dans cet article nous commençons par présenter le modèle algébrique qui permet de formaliser les SMI pour mieux les décrire et les comparer. Nous considérons ensuite les exécutions de ces SMI qui constituent une interprétation d'une partition. Nous convenons dans cet ar-

ticle qu'il s'agit du sous-ensemble des exécutions qui conservent l'ordre des débuts des notes. Cette étude se focalise donc sur la gestion des suspensions des notes et des articulations qu'elle permet à l'interprète de contrôler en temps réel. Pour comparer les SMI, nous introduisons des propriétés d'interactivité, d'expressivité et de difficulté que nous quantifions. Celles-ci sont définies à partir de dénombrements des exécutions des SMI et des commandes de leurs dispositifs en prenant le piano pour référence.

2. MODÈLE ALGÈBRE

Dans cette section, nous introduisons les définitions et les notations qui sont utilisées pour la formalisation.

2.1. Définition d'un système musical interactif

Un SMI (système musical interactif) est un quadruplet $\langle is, \mathcal{I}(s), \mathcal{D}, \mathbf{m}(s) \rangle$ où :

- is est une partition interactive, c'est-à-dire un couple $\langle s, i \rangle$, où s est un squelette de partition et i en est la partie interactive ;
- $\mathcal{I}(s)$ est une fonction associant à la partition s un ensemble d'exécutions qui seront dites *correctes* ;
- \mathcal{D} est le langage du dispositif d'entrée ;
- $\mathbf{m}(s)$ est un mapping associant une exécution de s à un mot de \mathcal{D} .

Tous ces éléments sont définis dans les sous-sections qui suivent.

2.2. Squelette d'une partition

Les événements musicaux provenant d'une partition, tels que nous les étudions, n'ont pas de temps stricts. La seule chose que l'on définit est une relation d'ordre : un événement est avant un autre. Nous nous focalisons sur des événements correspondant au début de quelque chose ou à une fin. Chaque début n'a qu'une et une seule fin qui lui correspond. Inversement, chaque fin n'a qu'un seul début qui lui correspond. Cette unicité peut être garantie par construction en associant les débuts et les fins dans une même structure. On peut remarquer que, dans une partition manuscrite ou imprimée, cette association est déjà présente, car le symbole d'une note définit à la fois son début (position temporelle dans la partition) et sa fin (la durée est explicite, noire, croche...).

Soient deux domaines, D celui des débuts et S celui des suspensions. Nous utiliserons le terme de *suspensions* plutôt que *fins de notes* car celles-ci seront contraintes par un ordre partiel qui conduira à plusieurs positions temporelles possibles. Cette étude porte justement sur les placements des suspensions lors de l'exécution d'une partition. À l'inverse, les débuts de notes seront toujours ordonnés entre eux totalement, exception faite des synchronisations qui sont impossibles à réaliser manuellement.

Le domaine qui nous intéresse est défini comme le produit cartésien des débuts et des suspensions : $D \times S$.

Pour tout domaine T , on définit l'ensemble des s-mots sur T , $SW(T)$, comme étant l'ensemble des listes d'ensembles non-vides d'éléments de T ($SW(T) \subset List(Set(T))$). Si les ensembles peuvent être vides on notera SW^* .

Un squelette de partition p est un s-mot sur $D \times S$: $p \in SW(D \times S)$.



Figure 1. Les cinq premières mesures du Scherzo de la Sonate Op. 26 de Beethoven.

Les S-langages [6] permettent de noter les synchronisations au moyen de s-lettres. Une s-lettre est un ensemble non vide de lettres noté entre parenthèses. Un s-mot est une suite de s-lettres. Un s-langage est un ensemble de s-mots. Le squelette de la partition de la figure 1 est composé de 10 s-lettres synchronisant les débuts des événements verticaux, qu'il s'agisse de notes ou d'accords, et de 22 lettres correspondant aux 22 notes apparaissant au total, toutes occurrences comprises. Les intervalles temporels sont notés au moyen des noms des notes associées. Par exemple $\langle A4, \overline{A4} \rangle$ pour la première note. Voici donc ce squelette dans lequel tous les débuts des notes sont ordonnés selon la partition :

$$sb = (\langle A4, \overline{A4} \rangle) (\langle B4, \overline{B4} \rangle) (\langle F4, \overline{F4} \rangle) (\langle A4, \overline{A4} \rangle) (\langle C5, \overline{C5} \rangle) (\langle D5, \overline{D5} \rangle) (\langle E4, \overline{E4} \rangle) (\langle G4, \overline{G4} \rangle) (\langle E5, \overline{E5} \rangle) (\langle G3, \overline{G3} \rangle) (\langle B4, \overline{B4} \rangle) (\langle A3, \overline{A3} \rangle) (\langle C5, \overline{C5} \rangle) (\langle F3, \overline{F3} \rangle) (\langle A4, \overline{A4} \rangle) (\langle F5, \overline{F5} \rangle) (\langle B3, \overline{B3} \rangle) (\langle A4, \overline{A4} \rangle) (\langle D5, \overline{D5} \rangle) (\langle E3, \overline{E3} \rangle) (\langle G4, \overline{G4} \rangle) (\langle E5, \overline{E5} \rangle)$$

Pour discriminer les occurrences d'une même note dans un s-mot, on indiquera le rang chronologique de l'occurrence chaque fois que ce sera nécessaire. Ainsi, la suite des $A4$ sera notée de la façon suivante : $[A4, 1][\overline{A4}, 1][A4, 2][\overline{A4}, 2][A4, 3][\overline{A4}, 3][A4, 4][\overline{A4}, 4]$ ou bien s'il n'y a pas d'ambiguïté, $A4\overline{A4}A4\overline{A4}A4\overline{A4}A4\overline{A4}$.

2.3. Exécution d'une partition

Pour représenter l'exécution d'une partition, nous considérons uniquement l'ordre des événements, et non les durées. Ainsi, une exécution est représentée par un s-mot sur les lettres représentant les événements de début et de suspension des notes. Pour exprimer ces s-mots, nous introduisons deux opérations, le développement qui permet de séparer les événements de début et de suspension d'une même note, et l'étirement qui permet de déplacer les suspensions vers la droite selon l'ordre temporel indiqué sur la partition.

2.3.1. Développement d'un squelette

Le développement dvp d'un squelette est une fonction $(SW(D \times S) \rightarrow SW^*(D + S))$ définie par itération sur

une fonction $\text{sq} (Set(D \times S) \rightarrow Set(D + S))$. Un développement consiste à déstructurer les éléments du produit cartésien $D \times S$ et à introduire, une fois sur deux, une s-lettre vide (d'où le type SW^*) qui ultérieurement, par étirement, recevra éventuellement des suspensions. Pour bien identifier cette s-lettre vide, nous la noterons $\bar{()}$.

$$\begin{aligned} \text{dvp}(\bar{()}) &= () \\ \text{dvp}(s1 \cdot \bar{sw}) &= \text{sq}(s1) \cdot \bar{()}\text{dvp}(sw) \\ \text{sq}(\emptyset) &= \emptyset \\ \text{sq}(\langle d, s \rangle \cdot sw) &= d \cdot s \cdot \text{sq}(sw) \end{aligned}$$

Les situations temporelles des notes du squelette de la partition sont représentées sur la figure 2. Sur le diagramme de gauche, les notes sont indiquées par un point rassemblant leur début et leur fin. Ces points sont appelés des *granules temporelles* et seront utilisés lors de la présentation du fonctionnement du Metapiano 3.1.3. Nous nous intéressons particulièrement à l'ordre des débuts car il sera conservé dans toutes les exécutions que nous considérons comme étant des interprétations de la partition. Sur la figure, les granules sont positionnées selon leur début. Les lignes verticales réunissent les événements synchronisés mais les durées ne sont pas représentées. En effet, les colonnes ne sont pas de durées égales.

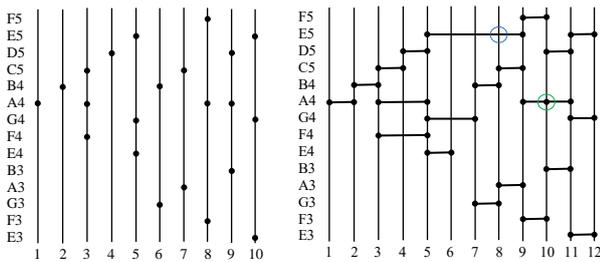


Figure 2. À gauche, les situations temporelles relatives des notes de la partition vues comme granules temporelles et à droite le développement avec continuité et contiguïté.

Propriétés du développement : Le développement respecte les quatre propriétés suivantes : (1) le contenu (2) l'ordonnement des débuts (3) le fait que les suspensions sont toujours après leurs débuts respectifs (4) une alternance de s-lettres contenant au moins un début et de s-lettres n'en contenant pas.

Le développement du squelette de notre partition est donc le suivant :

$$\text{dvp}(sb) = (A4\bar{A4})\bar{()}(B4\bar{B4})\bar{()}(F4\bar{F4}A4\bar{A4}C5\bar{C5})\bar{()}(D5\bar{D5})\bar{()}(E4\bar{E4}G4\bar{G4}E5\bar{E5})\bar{()}(G3\bar{G3}B4\bar{B4})\bar{()}(A3\bar{A3}C5\bar{C5})\bar{()}(F3\bar{F3}A4\bar{A4}F5\bar{F5})\bar{()}(B3\bar{B3}A4\bar{A4}D5\bar{D5})\bar{()}(E3\bar{E3}G4\bar{G4}E5\bar{E5})\bar{()}$$

2.3.2. Représentation de l'ordre induit par le rythme

Il y a essentiellement deux façons de considérer le temps : soit comme une relation entre deux instances de l'univers de discours, qui les situent l'un par rapport à l'autre, soit comme propriété d'une instance, qui indique sa durée. Dans le premier cas, nous parlerons du temps événementiel, dans le second cas, du temps durée, que

cette durée soit objective ou subjective, absolue ou relative. Nous nous intéressons dans ce travail au temps événementiel, qui correspond dans le domaine musical aux articulations entre les émissions des notes, qui sont nos objets de discours.

Aristote (Physique, V, 3) a fait une étude des différents types de relations temporelles existant entre des événements duratifs considérés comme objets primitifs et non comme des intervalles de la droite réelle constituée de points sans dimension. Il a pu ainsi distinguer deux relations qui n'existent pas dans l'ensemble des nombres réels mais indispensable dans le domaine musical : *contiguïté* versus *continuité*, suivant que deux événements en contact – l'un se terminant au moment où l'autre commence - partagent une borne commune tout en conservant leur individualité ou bien se fondent en un nouvel événement qui est leur somme.

Les troisième et quatrième occurrences de A4 dans la partition sont contiguës. Elles ont une borne commune mise en évidence par un cercle sur le schéma de droite de la figure 2. Cela signifie qu'il n'est pas possible d'insérer entre elles un événement de même type, aussi petit soit-il.

La liaison des deux premières occurrences de E5 dans la partition les rend continues, elles sont représentées par un seul segment sur le schéma de droite de la figure 2 où un cercle entoure l'absence du point.

2.3.3. Étirement du développement d'un squelette

Pour transformer notre squelette de façon à représenter l'ordre induit par une exécution, nous introduisons une opération d'étirement des suspensions vers la droite.

Un étirement est une réécriture (\rightarrow_e) dans $SW^*(D + S)$ qui déplace une suspension vers la droite :

$$s \in S, (\dots (s \cdot w) w' \dots) \rightarrow_e (\dots w (s \cdot w') \dots)$$

L'étirement préserve les quatre propriétés du développement. La relation d'étirement est confluente et fortement normalisante.

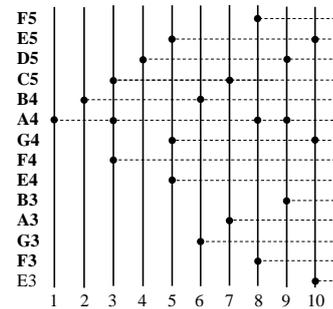


Figure 3. Situations temporelles relatives des notes du squelette de la partition avec étirements.

Pour coder l'ordre induit par l'exécution de la partition, il s'agit d'étirer le développement du squelette pour amener les suspensions à leur place dans l'ordre chronologique des événements. Voici l'exemple correspondant à la

figure 3 : $(A4)(\overline{B4})(\overline{A4})(F4A4C5)(\overline{D5})(\overline{E4G4E5})(\overline{B4})(G3B4)(\overline{C5})(A3C5)(\overline{A4})(F3A4F5)(\overline{A4D5})(B3A4D5)(\overline{E5G4})(E3G4E5)(\overline{E3G4E5F4E4B4G3B4A3C5F3F5B3})$

Considérons un autre exemple que nous noterons *sbr* et qui est obtenu par fermeture transitive de l'étirement appliqué à *dv* (*sb*) et que nous allons utiliser par la suite :

$sbr = (A4)(\overline{A4})(B4)(\overline{B4})(F4A4C5)(\overline{C5})(D5)(\overline{D5F4A4})(E4G4E5)(\overline{E4})(\overline{G4G3B4})(\overline{G3B4})(A3C5)(\overline{A3C5E5})(F3A4F5)(\overline{F3A4F5})(B3A4D5)(\overline{B3A4D5})(E3G4E5)(\overline{E3G4E5})$

Les situations temporelles relatives des notes conformément à ce mot sont représentées sur le schéma de droite de la figure 2.

La composition d'un développement et de la fermeture transitive des étirements définit une fonction des squelettes $SW(D \times S)$ dans un ensemble de $SW^*(D + S)$. A partir d'un squelette *sb* comportant *n* s-lettres s_i , l'ensemble des étirements possibles du développement a un cardinal de $\prod_{i=0}^{i=n-1} (2(n-i) - 1) * ||s_i||$

où $||s||$ représente le cardinal de l'ensemble *s*.

Appliqué à notre partition, l'ensemble des étirements a un cardinal de $19 \times 1 \times 18 \times 1 \times 17 \times 3 \dots \times 3 \times 3 \times 3 \times 1 \simeq 3,25 \times 10^{14}$.

Notons que l'étirement a conduit à inclure la lettre $\overline{G4}$ dans la s-lettre (*G3B4*) pour assurer l'alternance des s-lettres contenant des débuts et celles n'en contenant pas et pour conserver le nombre de lettres. On verra plus loin que le relâchement de la commande permettra de suspendre la note *E4* pour interpréter le silence qui la suit, alors que la suspension de la note *G4* sera automatique conduisant à un *esatto legato* avec les notes suivantes.

2.3.4. Espace d'exécution

Une exécution d'une partition est dite *correcte* si elle respecte les consignes indiquées sur la partition. L'ensemble des exécutions correctes est un ensemble de s-mots qui est donné avec la partition et noté $\mathcal{I}(s)$. On parlera aussi d'*espace d'exécution*. La figure 4 représente la partition comportant les consignes d'articulation pour l'exécution des cinq premières mesures du Scherzo de Beethoven.



Figure 4. Les cinq premières mesures du Scherzo de Beethoven restreintes aux consignes d'exécution du legato et staccato.

Les consignes pour l'exécution concernent la rythmique, les articulations et la dynamique. Concernant les consignes rythmiques, les durées seront laissées à l'appréciation de l'interprète et notre codage ne prend en compte

que l'ordre temporel des suspensions induit par les durées. Quant aux articulations, elle seront codées par des relations temporelles d'intervalle.

2.3.5. Représentation de l'ordre temporel induit par les consignes d'articulations

Musicalement la contiguïté de deux notes différentes conduit à deux sortes de consignes d'articulations pour l'exécution de la partition : *legato* ou *staccato*. Le *legato* cherche à lier le plus possible les notes qui se suivent, le *staccato* au contraire les détache plus ou moins les unes des autres. Le *legato* consiste donc à lier les sons successifs de sorte qu'il n'y ait pas de silence entre eux. Le *staccato*, au contraire, est obtenu en introduisant des pauses minimales entre les notes. Les deux techniques permettent d'articuler la phrase musicale. Dans le jeu *legato*, les instruments à cordes frottées, les vents et les voix réalisent une continuité entre les notes successives dans un « *esatto legato* ». Les instruments polyphoniques à touches quant à eux, pouvant superposer les sons, jouent *legato* en réalisant un chevauchement très court des sons au passage d'une note à la suivante. Dans le jeu *staccato*, pour tous les instruments, les notes jouées sont détachées les unes des autres en perdant une partie de leur valeur pour un silence équivalent.

Ces considérations sur les articulations se rapportent aux travaux de [9, 10]. Elles se fondent sur les positions relatives entre intervalles, développées dans le cadre des algèbres relationnelles initiées au début du XX^e siècle par [12], développées par [11] et popularisées dans le domaine du raisonnement temporel en intelligence artificielle par [1] dont nous reprenons la terminologie : *before*, *meet*, *overlap*, *start*, *during*, *end*, *equal*. Selon cette terminologie, deux notes liées au clavier par un *legato* sont en relation *overlap*, deux notes liées par un *esatto legato* sont en relation *meet* et deux notes articulées par un *staccato* sont en relation *before*. Les notes dont les débuts sont parfaitement synchronisés sont en relation *start*, les notes dont les suspensions sont synchronisées en relation *end*. Enfin, il faut noter que les synchronisations exactes qui sont codées dans le s-mot *sbr* obtenu par développement et étirements du squelette pour représenter le rythme de la partition dans le paragraphe 2.3.3 ne sont pas des consignes pouvant être respectées exactement par les interprètes. En pratique, les doigts du pianiste exécutent bien souvent d'infimes désynchronisations privilégiant les notes graves sur les aiguës par exemple. Nous considérerons dans la suite, que les débuts des notes qui sont synchronisés admettent ce seul ordre.

Sur la figure 4, on ne considère que les signes d'articulation situés au-dessus des notes, liaisons ou points. Les liaisons ou coulés indiquent que les notes sont jouées sans séparation *legato* ; les points, au contraire, indiquent que les notes sont jouées détachées les unes des autres *staccato*, car séparées par des silences. Pour expliquer le codage, procédons mesure par mesure.

Mes. 1 $(A4)(B4)(\overline{A4})(\overline{B4})$, les deux notes A4 et B4 sont liées par un coulé. Pour lier deux notes successives au cla-

vier, il faut relâcher la première touche après avoir enfoncé la deuxième. Donc, la s-lettre $(\overline{A4})$ doit apparaître après la s-lettre $(B4)$. L'exécution correcte du coulé s'écrit : $(A4)(B4)(\overline{A4})(\overline{B4})$. Lors du passage de A4 à B4, il y a chevauchement des sons créant le *legato*, mais également une dissonance entre les sons que l'interprète évalue et minimise par un *overlap* court.

Mes. 2 $(F4A4C5)(D5)(\overline{C5})(\overline{D5})$, l'accord $(F4A4C5)$ comporte trois touches à jouer le plus synchroniquement possible. Puis D5 est jouée seule $(F4A4C5)(D5)$. C5 et D5 sont liées par un coulé et sont exécutées comme précédemment en *overlap* : $(F4A4C5)(D5)(\overline{C5})(\overline{D5})$. F4 et A4 durent la mesure entière et sont liées aux notes du début de la 3ème mesure. A4 n'a pas de signe de coulé comme F4, mais de façon implicite on lui en attribue un.

Mes. 3 $(E4G4E5)(\overline{F4A4})(\overline{E4})(G3B4)(\overline{G4})(\overline{G3})(\overline{B4})$, l'accord $(E4G4E5)$ comporte trois nouvelles touches à jouer le plus synchroniquement, et est suivi de la suspension en *overlap* $(\overline{F4A4})$, des deux notes tenues de la 2^e mesure. La touche E4 est ensuite relâchée pour faire entendre le silence du 2^e temps $(\overline{E4})$. Au 3^e temps, le pianiste joue le plus synchroniquement deux touches, $(G3B4)$, il relâche rapidement $(\overline{G4})$ la touche précédemment jouée en début de mesure pour exécuter, en *overlap*, le *legato* entre les deux notes G4 et B4, puis il relâche $(\overline{G3})$ pour exécuter le *staccato* de cette note, et enfin relâche $(\overline{B4})$ le plus tard possible avant la fin de la mesure pour ménager un bref silence d'articulation avant le début de la 4^e mesure. Pendant ce 3ème temps de la 3^e mesure, 3 relâchements de touches ordonnés et non synchrones se succèdent : $(\overline{G4})(\overline{G3})(\overline{B4})$. Le pianiste a toute liberté de s'écarter des consignes d'exécution, il peut étirer les relâchements différemment et les exécuter dans un autre ordre.

Mes. 4 $(A3C5)(\overline{A3})(F3A4F5)(\overline{C5E5})(\overline{F3})(\overline{A4F5})(B3A4D5)(\overline{B3A4D5})$, deux types d'articulations sont confrontées : points de *staccato* à la main gauche, coulés de *legato* à la main droite. Les touches $(A3C5)$ sont jouées (la note E5 n'est pas rejouée, elle est maintenue depuis le début de la 3^e mesure par la liaison de prolongation qui met les deux E5 en continuité). La touche A3 est relâchée seule $(\overline{A3})$ pour exécuter le point de *staccato*. Puis, trois nouvelles touches sont jouées $(B3A4F5)$, avec un point de *staccato* pour la main gauche et des fins de coulés *legato* pour la main droite. Comme constaté précédemment dans la 3^e mesure, 3 moments de relâchements de touches ordonnés et non synchrones se succèdent : $(\overline{C5E5})(\overline{F3})(\overline{A4F5})$, le premier pour clore les *overlaps* de *legato*, le deuxième pour exécuter la note *staccato*, le dernier pour ménager un prompt silence d'articulation avant l'accord qui va venir. Ici les trois touches attaquées simultanément $(B3A4D5)$ et relâchées *staccato* également simultanément $(\overline{B3A4D5})$ sont en relation harmonique et en relation d'intervalles *equal*.

Mes. 5 $(E3G4E5)(\overline{E3G4E5})$, cet accord est exécuté de la même façon. Le pianiste a cependant toute liberté de s'écarter des consignes d'exécution, il peut étirer les relâchements différemment et les exécuter dans un autre ordre.

Réunissons les s-mots successifs établis pour chaque mesure. Le langage décrivant l'espace d'exécution de la partition, c'est-à-dire l'ensemble des exécutions correctes selon les consignes écrites et les mouvements des touches sous les doigts du pianiste est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{I}(\text{sb}) = (A4)(B4)(\overline{A4})(\overline{B4})(F4A4C5)(D5)(\overline{C5})(\overline{D5})(E4G4E5)(\overline{F4A4})(\overline{E4})(G3B4)(\overline{G4})(\overline{G3})(\overline{B4})(A3C5)(\overline{A3})(F3A4F5)(\overline{C5E5})(\overline{F3})(\overline{A4F5})(B3A4D5)(\overline{B3A4D5})(E3G4E5)(\overline{E3G4E5})$$

Ce s-mot représente l'exécution idéale respectant toutes les consignes d'articulation indiquées sur la partition. Si nous avons considéré que les synchronisations pouvaient donner lieu à toutes les permutations possibles, nous aurions obtenu un ensemble dont le cardinal peut être calculé par la formule suivante :

$$1!1!1!1!3!1!1!1!3!2!1!2!1!1!1!2!1!1!3!2!1!2!3!3!3! = 8\,957\,952$$

Mais ce nombre n'a aucun sens en pratique car il ne représente pas vraiment le nombre d'exécutions qu'un interprète peut exécuter sur un piano. Aussi, dans la suite, nous considérerons que l'ensemble $\mathcal{I}(\text{sb})$ est réduit au seul s-mot donné ci-dessus, et que ce s-mot lors de l'exécution au piano donne lieu à un seul mot, induit par un seul ordre temporel pour les synchronisations comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 2.3.5. Nous admettrons donc que $|\mathcal{I}(\text{sb})| = 1$.

2.3.6. Dénombrement des exécutions possibles

Nous nous situons dans le cas de l'interprétation et non de l'improvisation, ainsi nous ne considérons que des exécutions de la partition qui ne modifient pas l'ordre de la séquence des débuts des notes. Les autres exécutions ne sont pas considérées comme des exécutions de cette partition. Nous nous intéressons donc à l'ensemble de toutes les permutations des débuts et des suspensions, qui respectent l'ordre des débuts. Nous proposons deux façons de définir cet ensemble.

Une première proposition consiste à considérer la fermeture transitive du développement du squelette de la partition pour l'opération d'étirement. Les situations temporelles relatives des notes sont représentées sur la figure 2. Cela revient à considérer qu'il est impossible d'insérer des suspensions au milieu d'événements qui sont synchronisés. Ce dénombrement a été réalisé dans le paragraphe 2.3.3 :

$$|\mathcal{A}^*(\text{sb})| = 19 \times 1 \times 18 \times 1 \times 17 \times 3 \dots \times 3 \times 3 \times 3 \times 1 \simeq 3,25 \times 10^{14}$$

Une deuxième proposition consiste à considérer qu'au piano, il est possible d'insérer des suspensions à l'intérieur des synchronisations et que donc les s-lettres contenant des débuts peuvent elles aussi être cassées en plusieurs s-lettres. Ces objets s'apparentent à des involutions sans points fixes qui peuvent être dénombrées par la formule suivante où n est la demi-longueur du mot : $(2n-1)(2n-3)\dots \times 5 \times 3 \times 1$. Comme la partition comporte 22 notes, nous avons 44 événements (22 débuts et 22 suspensions) :

$$|\mathcal{A}^*(\text{sb})| = 43 \times 41 \times 39 \times \dots \times 5 \times 3 \times 1 \simeq 5,6 \times 10^{26}$$

Il conviendrait en toute rigueur d'enlever les s-mots correspondant aux suspensions d'une occurrence de note qui passent au delà des occurrences suivantes. Car le pianiste doit relâcher une touche pour pouvoir l'enfoncer à nouveau. Le nombre de possibilités est alors compris entre $1,3 \times 10^{18}$ et $7,3 \times 10^{22}$. Mais nous nous dispenserons de faire ce calcul, car le résultat serait du même ordre de grandeur.

2.4. Partition interactive

Soit s une partition, sq son squelette et soit sra un s-mot obtenu par développement et étirements successifs à partir de sq pour correspondre à l'ordre induit par le rythme de la partition s et au contrôle des articulations souhaité. Une partition interactive est un coloriage de sra c'est-à-dire un couple :

$$is = \langle sra, i \rangle$$

où i est un s-mot inclus dans sra ¹. Le s-mot i est dit *s-mot d'interaction* et les lettres de i sont appelées des *points d'interaction*. Ces lettres seront associées à un dispositif de commande pour activer des événements de la partition.

On définit le degré d'interactivité d'une partition interactive is par la quantité suivante :

$$di(is) = \frac{|i|}{|s|}$$

c'est-à-dire le nombre de points d'interaction divisé par le nombre total de lettres de s . Ce nombre correspond à la quantité d'actions que l'interprète doit effectuer pour jouer la partition. Ainsi un degré d'interactivité nul indique qu'il n'y a pas de points d'interaction, le système joue tout seul, alors qu'un degré d'interactivité de 1 indique que tous les événements de la partition, qu'ils soient des débuts ou des fins, sont interactifs et peuvent être activés par l'interprète.

2.5. Langage du dispositif d'entrée

On considère dans cet article des dispositifs tels que des boutons ou des touches de clavier qui vont permettre d'activer les points d'interaction. Deux actions sont possibles sur ces dispositifs, l'enfoncement et le relâchement. Ainsi pour décrire le langage d'une touche, on associe une lettre x pour l'enfoncement et \bar{x} pour le relâchement.

2.6. Mapping

Soit $is = \langle s, i \rangle$ une partition interactive obtenue à partir d'un squelette sq et soit \mathcal{D} le langage du dispositif d'entrée, le mapping précise la correspondance entre un mot du dispositif d'entrée et une exécution de la partition au moyen de la partition interactive. On introduit les définitions suivantes.

¹. i est inclus dans sra s'il est obtenu en supprimant des lettres de sra .

2.6.1. Commande

Une commande est un mot coloré du langage du dispositif d'entrée \mathcal{D} . En effet, la correspondance entre le mot du dispositif d'entrée et le s-mot d'interaction nécessite parfois de considérer que certaines lettres du mot du dispositif sont inactives.

2.6.2. Mot de commande

Soit $\langle w, wi \rangle$ une commande, le mot wi est appelé mot de commande.

2.6.3. Mapping de commande

Un mapping de commande est une fonction totale associant une exécution de $\mathcal{I}(s)$ à une commande : $\mathbf{m}(sq) : \mathcal{C}(s) \rightarrow \mathcal{I}(s)$, où $\mathcal{C}(s)$ est inclus dans l'ensemble des commandes et représente le domaine de $\mathbf{m}(sq)$. On notera $\mathcal{I}(\mathbf{m}(sq))$ le codomaine de $\mathbf{m}(sq)$, c'est-à-dire l'ensemble des exécutions que les commandes permettent d'exécuter.

Rappelons que les mots w et wi sont des séquences de lettres correspondant à des enfoncements ou des relâchements de touches. Chaque lettre du mot de commande wi est associée à un point d'interaction de i pour activer les événements associés dans la partition.

Remarque. Pour un squelette sq , la conception de la fonction $\mathbf{m}(sq)$ nécessite de faire plusieurs choix. On remarque que pour des raisons d'ergonomie musicale, il est préférable d'associer des enfoncements de touches à des débuts de notes plutôt qu'à des fins de notes. De plus, dans l'association des lettres de wi avec celles de i , le respect de l'ordre chronologique est préféré pour permettre le jeu en temps réel.

3. ESPACES D'EXÉCUTION DU METAPIANO ET DU MIDIFILEPERFORMER

Pour présenter les deux espaces, nous allons utiliser le même squelette sb (donné au paragraphe 2.2) de la partition qui est représentée sur la figure 4. Mais il faut préciser qu'en pratique, le MidifilePerformer prend en entrée un fichier MIDI pour l'analyser automatiquement. Le résultat dépend donc de la façon dont le fichier MIDI code la partition. Le plus souvent dans les fichiers MIDI les notes sont synchronisées au moyen d'un séquenceur ce qui correspond au codage de notre étude. Nous supposons donc que le MidifilePerformer a en entrée un fichier MIDI qui le conduit au squelette sb .

3.1. Partition interactive

Nous allons considérer la même partition interactive pour les deux systèmes pour mieux les comparer. Précisons toutefois que la partition interactive du Metapiano est obtenue par analyse musicale, avec une séparation en voix, et des choix manuels pour pouvoir réaliser les articulations prescrites. Alors que celle du MidifilePerformer est

obtenue par un algorithme [4] appliqué à un fichier MIDI. On supposera ici à nouveau que le fichier MIDI conduit au même résultat que l'analyse manuelle du Metapiano et donc à la même partition interactive qui est décrite ci-dessous.

3.1.1. Coloriage en gras des lettres de débuts de notes

Remarquons que les débuts de notes qui sont dans une même s-lettre de sb sont synchronisés. Ainsi il suffit de colorer un seul début dans chaque s-lettre pour pouvoir activer l'ensemble des débuts qui y apparaissent. Considérons le coloriage suivant des lettres de début dans le squelette sb :

$$((\mathbf{A4}, \overline{A4})(\mathbf{B4}, \overline{B4})(F4, \overline{F4})(A4, \overline{A4})(\mathbf{C5}, \overline{C5})(\mathbf{D5}, \overline{D5}))$$

$$((\mathbf{E4}, \overline{E4})(G4, \overline{G4})(E5, \overline{E5}))((G3, \overline{G3})(\mathbf{B4}, \overline{B4})(A3, \overline{A3})(\mathbf{C5}, \overline{C5}))$$

$$((F3, \overline{F3})(\mathbf{A4}, \overline{A4})(F5, \overline{F5}))((B3, \overline{B3})(A4, \overline{A4})(\mathbf{D5}, \overline{D5})(E3, \overline{E3})$$

$$(G4, \overline{G4})(\mathbf{E5}, \overline{E5})).$$

Concernant les suspensions, il conviendra de colorer une suspension par s-lettre pour la même raison, mais pour les déterminer, il faut se référer au rythme et aux articulations de la partition. Cette opération sera présentée en dernier directement sur le mot sra.

3.1.2. Codage des articulations liées

Pour construire le s-mot sra qui va nous servir de référence pour définir la partition interactive, il faut se référer au s-mot sbr (voir paragraphe 2.3.1) qui donne déjà les synchronisations des suspensions selon le rythme de la partition. Considérons maintenant les articulations qui sont indiquées sur la partition. Celles-ci doivent pouvoir être exécutées par l'interprète. Ainsi, en raison de la liaison *legato* avec $E4$, le $\overline{F4}$ de la 2^e mesure ne doit pas être synchronisé avec la s-lettre $(\overline{D5A4})$. Il est alors déplacé dans la s-lettre suivante $(E4G4E5)$. Ainsi, l'ordre entre les suspensions en question est ici modifié pour pouvoir articuler la liaison.

De plus, dans la 4^e mesure nous avons deux liaisons *legato* simultanées, l'une de continuité entre le $E5$ commençant à la 3^e mesure et le $F5$ de la 4^e mesure, et l'autre entre $C5$ et $A4$ tous les deux dans la 4^e mesure. Ces deux liaisons ne sont pas exécutées de la même façon, la première étant sur un temps beaucoup plus long que l'autre. Seule la liaison entre $C5$ et $A4$ sera exécutée par l'interprète et l'autre sera fixée. En conséquence, la lettre $\overline{E5}$ est déplacée dans la s-lettre contenant $F5$. En appliquant les opérations d'étirement adéquates, on obtient le mot suivant :

$$(A4)(\overline{A4})(B4)(\overline{B4})(F4A4C5)(\overline{C5})(D5)(\overline{D5A4})(\overline{F4E4G4E5})(\overline{E4})$$

$$(\overline{G4G3B4})(\overline{G3B4})(A3C5)(\overline{A3C5})(\overline{E5F3A4F5})(\overline{F3A4F5})(B3A4$$

$$D5)(\overline{B3A4D5})(E3G4E5)(\overline{E3G4E5}).$$

3.1.3. Codage des notes piquées

Enfin, le s-mot d'interaction doit permettre aussi d'exécuter correctement les notes piquées, qui n'ont pas été prises en compte jusqu'ici. Notamment il s'agit des notes piquées qui sont synchronisées avec des notes non piquées, telles que le $G3$ de la 3^e mesure, le $A3$ et le $F3$

de la 4^e mesure. Les suspensions de ces notes ne doivent pas être synchronisées avec les noires qui sont jouées en même temps mais doivent se produire avant. Comme il est impossible de conserver l'alternance des s-lettres, celles contenant des débuts et celles n'en contenant pas, en ajoutant pour ces trois notes une suspension seule dans une s-lettre, on utilise ici la notion de *granule temporelle* introduite au paragraphe 2.3.1 pour les représenter. La granule est ponctuelle et contient en elle-même l'information de suspension de la note dans le futur à une distance temporelle déterminée à l'avance. Les granules sont notées en ajoutant le symbole $^\circ$ à la fin de la lettre. Il convient alors de retirer les lettres correspondant aux suspensions des notes représentées par des granules. On obtient alors :

$$\mathbf{sra} = (A4)(\overline{A4})(B4)(\overline{B4})(F4A4C5)(\overline{C5})(D5)(\overline{D5A4})(\overline{F4E4G4E5})$$

$$E5)(\overline{E4})(\overline{G4G3^\circ B4})(\overline{B4})(A3^\circ C5)(\overline{C5})(\overline{E5F3^\circ A4F5})(\overline{A4F5})$$

$$(B3A4D5)(\overline{B3A4D5})(E3G4E5)(\overline{E3G4E5}).$$

3.1.4. Codage de la partition interactive

Il ne reste plus qu'à colorier le s-mot sra décrit ci-dessus pour obtenir la partition interactive. Il convient de se conformer au coloriage des lettres de début proposé au paragraphe 3.1.1 et de colorier les lettres de suspension à raison d'une par s-lettre ne contenant pas déjà une lettre de début colorée. Pour mieux s'y retrouver, on choisit à chaque fois de colorier une lettre de suspension correspondant à une lettre de début colorée. Ainsi, on obtient la partition interactive suivante :

$$is = (\mathbf{A4})(\overline{A4})(\mathbf{B4})(\overline{B4})(F4A4C5)(\overline{C5})(\mathbf{D5})(\overline{D5A4})(\overline{F4E4G4E5})$$

$$(\overline{E4})(\overline{G4G3^\circ B4})(\overline{B4})(A3^\circ C5)(\overline{C5})(\overline{E5F3^\circ A4F5})(\overline{A4F5})(B3A4$$

$$D5)(\overline{B3A4D5})(E3G4E5)(\overline{E3G4E5}).$$

3.2. Dispositif d'entrée

Pour pouvoir comparer le Metapiano et le Midifile-Performer, nous allons leur associer le même dispositif d'entrée. Il s'agit d'un clavier numérique quelconque pour jouer avec les cinq doigts d'une main.

3.2.1. Cas du Metapiano

Nous considérerons dans cet article que les touches du Metapiano sont génériques. En effet, parmi les informations provenant du dispositif d'entrée, seules les informations de vélocité d'enfoncement de touche et de vélocité de relâchement de touche sont prises en compte, la vélocité donnant la dynamique aux notes qui sont déclenchées ou relâchées. Or nous ne considérons pas ces informations dans cet article. Ainsi, le choix de la touche enfoncée ou relâchée ne change pas le résultat sonore, toutes les touches ont le même effet. Notons \mathcal{D}_{M_p} le langage du dispositif, il s'agit de l'ensemble des mots de Dyck de hauteur maximale 5. Pour rappel, un mot de Dyck w a les propriétés suivantes :

- Tous les préfixes de w ont un nombre de lettres \bar{x} inférieur ou égal au nombre de lettres x .
- Le mot w a autant de lettres x que de lettres \bar{x} .

3.2.2. Cas du MidifilePerformer

Les touches du clavier du MidifilePerformer ne sont pas génériques car il faut mémoriser la correspondance entre les touches enfoncées et les notes de la partition de façon à stopper la bonne note. Les lettres associées aux touches enfoncées sont alors numérotées. Le langage d'une touche est défini par l'expression rationnelle suivante :

$$T_x^1 = (x\bar{x})^*$$

Dans le cas de 5 doigts, le langage du dispositif est un shuffle des mots de T_x^1 :

$$\mathcal{D}_{M_f} = \sqcup_{i=1}^5 T_{x_i}^1$$

3.3. Mapping de commandes

Le mapping définit l'effet sur la partition des actions sur le clavier en associant un mot de commande au s-mot d'interaction de la partition interactive.

Considérons une partition du s-mot is qui est la partition interactive considérée au paragraphe 3.1.4 selon que le point d'interaction est un début ou bien une suspension. Notons a_i les s-lettres dont le point d'interaction est un début et \bar{a}_i celles dont le point d'interaction est une suspension :

$a_1 = ([\mathbf{A4}, 1])$	$\bar{a}_1 = ([\overline{\mathbf{A4}}, 1])$
$a_2 = ([\mathbf{B4}, 1])$	$\bar{a}_2 = ([\overline{\mathbf{B4}}, 1])$
$a_3 = ([F4, 1][A4, 2][\mathbf{C5}, 1])$	$\bar{a}_3 = ([\overline{\mathbf{C5}}, 1])$
$a_4 = ([\mathbf{D5}, 1])$	$\bar{a}_4 = ([\overline{\mathbf{D5}}, 1][\overline{A4}, 2])$
$a_5 = ([F4, 1][\mathbf{E4}, 1][G4, 1][E5, 1])$	$\bar{a}_5 = ([\overline{\mathbf{E4}}, 1])$
$a_6 = ([G4, 1][G3^\circ, 1][\mathbf{B4}, 2])$	$\bar{a}_6 = ([\overline{\mathbf{B4}}, 1])$
$a_7 = ([A3^\circ, 1][\mathbf{C5}, 2])$	$\bar{a}_7 = ([\overline{\mathbf{C5}}, 1])$
$a_8 = ([E5, 1][F3^\circ, 1][\mathbf{A4}, 3][F5, 1])$	$\bar{a}_8 = ([\overline{\mathbf{A4}}, 3][\overline{F5}, 1])$
$a_9 = ([B3, 1][A4, 4][\mathbf{D5}, 2])$	$\bar{a}_9 = ([\overline{\mathbf{B3}}, 1][\overline{A4}, 4][\overline{\mathbf{D5}}, 2])$
$a_{10} = ([E3, 1][G4, 2][\mathbf{E5}, 2])$	$\bar{a}_{10} = ([\overline{E3}, 1][\overline{G4}, 2][\overline{\mathbf{E5}}, 2])$

Le principe est de conserver lors de l'exécution l'ordre des s-lettres correspondant aux a_i entre elles ainsi que l'ordre induit par le fait que les débuts de notes sont activés avant leur suspension. Cette dernière propriété est impliquée par les touches du dispositif utilisé qui nécessitent d'être enfoncées avant de pouvoir être relâchées.

Certains mots produits par l'interprète sur le dispositif d'entrée peuvent mener à une exécution erronée selon le synthétiseur utilisé. En effet, un mot commençant par : $xx\bar{x}\bar{x}\dots$ va activer les s-lettres suivantes : $a_1 a_2 a_3 \bar{a}_1 \dots$. Les lettres a_1 et a_3 comportant chacune un début de la même note A_4 , le mot va conduire à réactiver cette note alors qu'elle est déjà en train de jouer, ce qui peut conduire à une erreur au moment du relâchement. Ainsi, pour éviter d'avoir à prendre en compte ce problème, nous nous plaçons dans le cas où les occurrences de notes sont différenciées.

3.3.1. Cas du Metapiano

Le principe du mapping du Metapiano est de fonctionner avec des touches génériques et de donner à l'interprète la possibilité d'exécuter les articulations. Le mapping du

Metapiano préserve l'ordre des s-lettres \bar{a}_i lors de l'exécution. Le mapping du Metapiano est effectué manuellement.

Examinons maintenant les mots de commandes. Ceux-ci sont des mots de Dyck de hauteur 5 maximum de longueur 20. Voici un exemple de mot de commande :

$$w = xx\bar{x}\bar{x}xx\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}$$

Voici le déroulé complet du jeu de la partition avec le mot w , en notant en gras les points d'interaction :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \mathbf{A4}, x \rightarrow \mathbf{B4}, \bar{x} \rightarrow \overline{\mathbf{A4}}, \bar{x} \rightarrow \overline{\mathbf{B4}}, x \rightarrow \mathbf{C5}F4A4, x \rightarrow \\ \mathbf{D5}, \bar{x} &\rightarrow \overline{\mathbf{C5}}, \bar{x} \rightarrow \overline{\mathbf{D5}}A4, x \rightarrow \overline{F4}E5\mathbf{E4}G4, \bar{x} \rightarrow \\ \overline{\mathbf{E4}}, x &\rightarrow \mathbf{B4}G3^\circ\overline{G4}, \bar{x} \rightarrow \overline{\mathbf{B4}}, x \rightarrow \mathbf{C5}A3^\circ, \bar{x} \rightarrow \\ \overline{\mathbf{C5}}, x &\rightarrow F5F3^\circ\mathbf{A4}\overline{E5}, \bar{x} \rightarrow \overline{\mathbf{A4}}F5, x \rightarrow \mathbf{D5}B3A4, \bar{x} \rightarrow \\ \overline{B3}A4\overline{\mathbf{D5}}, x &\rightarrow \mathbf{E5}E3G4, \bar{x} \rightarrow \overline{E3}G4\overline{\mathbf{E5}} \end{aligned}$$

Soit $m_{\text{mp}}(\text{sb})$ la fonction de mapping, le s-mot activé est le suivant :

$$m_{\text{mp}}(\text{sb})(w) = a_1 a_2 \bar{a}_1 a_2 a_3 a_4 \bar{a}_3 \bar{a}_4 a_5 \bar{a}_5 a_6 \bar{a}_6 a_7 \bar{a}_7 a_8 \bar{a}_8 a_9 \bar{a}_9 a_{10} \bar{a}_{10}$$

Certaines articulations peuvent donc être décidées lors de la performance, au risque de ne pas respecter les consignes d'exécution. Notamment, les deux premières notes peuvent être jouées *legato* comme dans le mot w mais elles peuvent aussi être jouées *staccato* avec un mot commençant plutôt comme ceci : $x\bar{x}\bar{x}\bar{x}$.

3.3.2. Cas du MidifilePerformer

Le principe du MidifilePerformer est de conserver l'association entre la touche enfoncée et la s-lettre a_i jouée pour que l'interprète puisse contrôler l'ordre des s-lettres de suspension en choisissant la touche à relâcher. Ainsi, l'ordre des s-lettres \bar{a}_i n'est pas conservé en général, cela dépend de l'exécution de l'interprète.

Les mots de commande sont des shuffles de mots de Dyck avec un alphabet de lettres indicées. Voici un exemple de mot de commande qui va donner le même résultat que dans le cas du Metapiano :

$$w' = x_1 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_1 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1$$

En effet, dans ce mot, les lettres barrées apparaissent chronologiquement conformément aux lettres non barrées de même indice. Soit $m_{mf}(\text{sb})$ la fonction de mapping du MidifilePerformer, le s-mot activé par ce mot de commande est donc le même que pour le Metapiano : $m_{mf}(\text{sb})(w') = m_{\text{mp}}(\text{sb})(w)$. En revanche, le mot de commande suivant donnera une exécution différente :

$$w'' = x_1 x_2 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_1 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1$$

En effet, au début de ce mot, on a inversé l'ordre entre \bar{x}_1 et \bar{x}_2 . La touche x_2 est donc relâchée avant la touche x_1 . La lettre \bar{x}_2 étant associée à la s-lettre \bar{a}_2 , il en résultera que la note B_4 sera stoppée avant la note A_4 . Le s-mot activé par ce mot de commande est le suivant : $m_{mf}(\text{sb})(w'') = a_1 a_2 \bar{a}_2 \bar{a}_1 a_3 a_4 \bar{a}_3 \bar{a}_4 a_5 \bar{a}_5 a_6 \bar{a}_6 a_7 \bar{a}_7 a_8 \bar{a}_8 a_9 \bar{a}_9 a_{10} \bar{a}_{10}$.

Dans ce dernier exemple, les deux premières notes de la partition sont en relation *during*. Il est à noter que cette relation est impossible à réaliser avec le Metapiano car elle implique la permutation de l'ordre des suspensions de ces s-lettres, ici \bar{a}_1 avec \bar{a}_2 .

3.4. Espaces d'exécution

En fonction des mappings que nous avons définis, il est maintenant possible d'exprimer les espaces d'exécutions des deux systèmes.

3.4.1. Cas du Metapiano

Soit $\mathcal{I}_{M_p}(\text{sb})$ l'espace d'exécution du Metapiano. Pour énumérer toutes les exécutions possibles du Metapiano, nous admettons que la fonction $\mathbf{m}_{\text{mp}}(\text{sb})$ est bijective. En effet, une exécution est un mot écrit avec les lettres a_i et \bar{a}_i pour i variant de 1 à 10. Si l'on oublie les indices de ces lettres, les images par $\mathbf{m}_{\text{mp}}(\text{sb})$ correspondent exactement aux mots de Dycks que sont les commandes (en substituant les x par des a). De plus, la numérotation des lettres a_i et \bar{a}_i est elle-même bijective car elle consiste à numéroter de façon univoque les lettres de gauche à droite.

L'ensemble des mots du dispositif d'entrée est l'ensemble des mots de Dyck de longueur 20. Le cardinal de cet ensemble est donné par le nombre de Catalan : $\mathcal{C}_{10} = 16\,796$. Cependant, nous nous sommes limités aux 5 doigts d'une main, donc l'ensemble qui nous intéresse est l'ensemble des mots de Dyck de hauteur limitée à 5. Ce nombre peut être calculé au moyen de la suite récurrente suivante [2] : $T(n+1, k) = \sum_{i=0}^n T(i, k)T(n-i, k-1)$ où n est la demi-taille des mots et k est la limitation en hauteur et $T(0, k) = 1$ si $k \geq 0$ et 0 sinon. Ainsi le cardinal de cet ensemble est réduit à :

$$|\mathcal{I}_{M_p}(\text{sb})| = 14\,041$$

3.4.2. Cas du MidifilePerformer

Soit $\mathcal{I}_{M_f}(\text{sb})$ l'espace d'exécution du MidifilePerformer. De même que pour le dénombrement des exécutions du Metapiano, nous considérons l'ensemble des mots de commande en admettant que la fonction $\mathbf{m}_{\text{mf}}(\text{sb})$ est bijective pour des raisons similaires aux arguments donnés pour le Metapiano. La différence réside dans le fait que nous avons des mots de Dyck indexés du fait que les touches enfoncées sont différenciées. Ces objets ont été dénombrés au paragraphe 2.3.6. Cependant, compte tenu du fait que l'on considère une main à 5 doigts, il faut limiter la hauteur de ces mots. Si on note D_i la série des chemins de Dyck étiquetés, mais partant de la hauteur i et finissant en i aussi (sans jamais plonger sous ce niveau), en regardant le premier retour au niveau i , on a : $D_i = 1 + tD_{i+1}(i+1)D_i$ ou encore $D_i = \frac{1}{1 - t(i+1)D_{i+1}}$. Comme la hauteur à un instant donné correspond au nombre de touches enfoncées, on écrit ces équations pour $i = 0, \dots, 4$, puis on complète avec $D_5 = 1$. La série recherchée est $D_0 = \frac{1-14t+33t^2}{1-15t+45t^2-15t^3}$ qu'il convient de développer en une série - qui est rationnelle - pour obtenir le coefficient du terme t^{10} : $D_0 = 1 + t + 3t^2 + 15t^3 + 105t^4 + 945t^5 + 9\,675t^6 + 104\,175t^7 + 1\,141\,425t^8 + 12\,578\,625t^9 + 138\,877\,875t^{10}$. On obtient donc :

$$|\mathcal{I}_{M_f}(\text{sb})| = 138\,877\,875$$

4. COMPARAISON ET DISCUSSION

Pour comparer les deux systèmes, on introduit quelques propriétés. Au degré d'interactivité introduit par le paragraphe 2.4, on ajoute deux autres propriétés pour exprimer l'expressivité et la difficulté d'exécution. Ensuite on dénombre les ensembles de mots pour calculer les quantités et obtenir le tableau comparatif de la figure 5.

4.1. Définition des SMI

On notera le Metapiano et le MidifilePerformer comme suit :

$$\text{mfP} = \langle \text{sbi}, \mathcal{I}(\text{sb}), \mathcal{D}_{M_f}, \mathbf{m}_{\text{mf}}(\text{sb}) \rangle$$

Pour les deux systèmes, les partitions interactives sont les mêmes, ainsi que l'espace d'exécution de la partition. Les dispositifs d'entrée sont les mêmes au niveau matériel, mais les langages considérés diffèrent puisque le Metapiano a des touches génériques alors que le MidifilePerformer a des touches différenciées. Les fonctions de mapping sont donc différentes ainsi que leurs espaces d'exécution.

Introduisons maintenant le piano sous forme de SMI pour mieux le comparer avec les deux autres SMI.

$$\text{mp} = \langle \text{sbi}_p, \mathcal{I}(\text{sb}), \mathcal{D}_{M_p}, \mathbf{m}_{\text{mp}}(\text{sb}) \rangle$$

Où :

- $\text{sbi}_p = \langle \text{sb}, \text{sra} \rangle$: la partition est entièrement interactive car il s'agit pour l'interprète d'activer tous les événements de début et tous les événements de fin de la partition, c'est-à-dire 44.
- L'ensemble des exécutions correctes de la partition est le même que pour les deux autres SMI.
- $\mathcal{D}_{M_p} = \bigsqcup_{i=1}^{88} T_{x_i}^1$: le clavier comporte 88 touches numérotées. Nous considérerons que pour le piano, le nombre de doigts n'est pas limité, afin de prendre pour référence une situation idéale d'utilisation de l'instrument.
- La fonction de mapping \mathbf{m}_{mp} ne dépend pas de la partition mais uniquement des touches enfoncées ou relâchées, auxquelles elle associe la note correspondante.

4.2. Propriétés d'un SMI

Soit \mathbf{s} une partition, soit $\text{ms} = \langle \text{is}, \mathcal{I}(\mathbf{s}), \mathcal{D}, \mathbf{m} \rangle$ un SMI, soit n la taille des mots de commande de $\mathcal{C}(m)$ et soit \mathcal{D}^n l'ensemble des mots de \mathcal{D} de taille n : $\mathcal{D}^n = \{w \in \mathcal{D}, |w| = n\}$.

4.2.1. Degré de difficulté

On définit le *degré de difficulté* d'un SMI par le rapport entre le nombre de commandes incorrectes que l'interprète peut jouer sur le dispositif d'entrée, c'est-à-dire le nombre de commandes qui n'ont pas d'image par la fonction de mapping, et le nombre de commandes total qui peuvent être jouées sur le dispositif.

$$\text{dd}(\text{ms}) = \frac{|\mathcal{D}^n| - |\mathcal{C}(m)|}{|\mathcal{D}^n|}$$

L'ensemble des commandes et l'ensemble des exécutions sont égaux dans le cas du Metapiano et du MidifilePerformer. On parvient à des degrés de difficulté nuls selon notre définition. Les cardinaux de ces ensembles ont été calculés au paragraphe 3.4.1 pour le Metapiano et au paragraphe 3.4.2 pour le MidifilePerformer.

$$\bullet \text{dd}(\text{mtp}) = \frac{|\mathcal{D}_{Mp}^{20}| - |\mathcal{C}(m_{mp})|}{|\mathcal{D}^{20}|} = \frac{14\,041 - 14\,041}{14\,041} = 0$$

$$\bullet \text{dd}(\text{mfp}) = \frac{|\mathcal{D}_{Mf}^{20}| - |\mathcal{C}(m_{mf})|}{|\mathcal{D}^{20}|} = \frac{138\,877\,875 - 138\,877\,875}{138\,877\,875} = 0$$

On constate que pour les deux SMI, toutes les commandes exécutées par l'interprète sont justes.

Nous nous sommes placés dans le domaine des fonctions de mapping. En effet, les mots joués par un interprète sont tous corrects. Cependant, les commandes pourraient avoir une taille ne correspondant pas à la taille de la partition, en étant ou trop courts ou trop longs. Dans le cas d'un mot trop court, la partition ne sera pas jouée jusqu'au bout, les SMI attendant que la commande soit complétée. Dans le cas d'un mot trop long, les SMI arriveront à la fin de la partition alors que les touches ne sont pas toutes relâchées. Dans ce cas, les deux SMI réaliseront les suspensions manquantes et les débuts que l'interprète aurait activés en trop seront ignorés.

Pour calculer le nombre de commandes que l'interprète peut jouer au piano, il faut dénombrer toutes les combinaisons de 22 notes parmi les 88 touches du piano, avec répétition et les multiplier par tous les étirements possibles. Pour calculer le degré de difficulté, il convient ensuite de soustraire le nombre d'exécutions de la partition et de diviser ce nombre par le nombre total de commandes². Le résultat de ce calcul est proche de 1.

4.2.2. Degré d'expressivité

On définit le *degré d'expressivité* d'un SMI par le rapport entre le nombre d'exécutions possibles pour le SMI et le nombre d'exécutions de la partition au piano.

$$\text{de}(\text{ms}) = \frac{|\mathcal{I}(m)|}{|\mathcal{I}(s)|}$$

Rappelons que les cardinaux de ces ensembles ont été calculés au paragraphe 3.4.1 pour le Metapiano, au paragraphe 3.4.2 pour le MidifilePerformer et que le cardinal de $\mathcal{A} * (sb)$ que nous utilisons est le premier du paragraphe 2.3.6.

$$\bullet \text{de}(\text{mtp}) = \frac{|\mathcal{I}_{Mp}(sb)|}{|\mathcal{A}*(sb)|} = \frac{14041}{3,25 \times 10^{14}} = 4 \times 10^{-10}$$

$$\bullet \text{de}(\text{mfp}) = \frac{|\mathcal{I}_{Mf}(sb)|}{|\mathcal{A}*(sb)|} = \frac{138\,877\,875}{3,25 \times 10^{14}} = 4 \times 10^{-6}$$

$$\bullet \text{de}(\text{mp}) = \frac{|\mathcal{A}*(sb)|}{|\mathcal{A}*(sb)|} = 1$$

4.2.3. Degré d'interactivité

Les degrés d'interactivité des deux SMI sont les mêmes. C'est-à-dire que l'interprète aura le même nombre d'actions à réaliser pour exécuter la partition.

2. $\frac{\binom{n+k-1}{k!} \times 3,25 \times 10^{14} - 3,25 \times 10^{14}}{\binom{n+k-1}{k!(n-1)!} \times 3,25 \times 10^{14}} \simeq 1$, avec $n = 88$ et $k = 22$

Propriétés	Metapiano	MidifilePerformer	Piano
Interactivité	0.45	0.45	1
Expressivité	4.10^{-10}	4.10^{-6}	1
Difficulté	0	0	1

Figure 5. Tableau comparatif des propriétés des SMI par rapport au piano.

La partition *sb* ayant 22 notes au total, elle comporte 44 lettres correspondant aux débuts et aux suspensions de ces notes. Rappelons que la partition interactive *is* comporte 20 points d'interaction. On obtient la valeur suivante pour le degré d'interactivité : $\text{di}(\text{is}) = \frac{|i|}{|sb|} = \frac{20}{44} = 0.45$. Concernant le piano, son degré d'interactivité est de 1 car tous les événements doivent être activés par l'interprète.

4.3. Discussion

L'évaluation des propriétés confirme que le MidifilePerformer est plus expressif que le Metapiano. En effet, le MidifilePerformer permet plus d'articulations grâce au choix des suspensions à réaliser qui est laissé à l'interprète. En effet, les deux SMI permettent de réaliser les relations temporelles *before*, *meet*, *finish* et *overlap*, alors que le MidifilePerformer permet de surcroît de réaliser des *during*, ce qui conduit à un nombre remarquable de possibilités supplémentaires par rapport au Metapiano.

Notons de plus que $\mathcal{I}(sb)$ est inclus dans les espaces d'exécution des deux SMI. Ce qui signifie que l'interprète peut réaliser l'interprétation idéale consignée dans la partition. Mais il peut aussi s'en éloigner, et c'est ce que mesure le degré d'expressivité.

Les deux systèmes sont de difficulté nulle, au sens où toute commande donne lieu à une exécution de la partition considérée comme une interprétation, plus ou moins fidèle aux consignes, de la partition. En revanche, le piano a une difficulté importante du fait qu'il est possible de ne respecter ni l'ordre des notes, ni les notes elle-mêmes. Ce qui donne lieu à de nombreuses exécutions incorrectes. Au contraire du piano, nos deux SMI sont donc accessibles à tous les interprètes.

Remarquons que certains mots pourraient ne pas fonctionner correctement avec certains synthétiseurs. Par exemple, dans le mot *aaā*, le fait que le début de la deuxième occurrence de la note *a* arrive avant que la première soit relâchée pourrait créer un dysfonctionnement si ce cas n'est pas traité correctement par le synthétiseur.

Les calculs proposés pour évaluer les propriétés donnent des résultats cohérents avec ce qui est attendu sur ces exemples. Cependant leur quantification demande à être affinée pour rester dans une fourchette plus facilement interprétable. Le degré d'interactivité semble facile à appréhender. Mais le fait que le Metapiano soit 10000 fois moins expressif que le MidifilePerformer l'est beaucoup moins. Ce nombre correspond aux possibilités supplémentaires données par le MidifilePerformer de choisir la note qui va être stoppée.

Rappelons en effet que toutes ces mesures s'appliquent

à des SMI pour une certaine partition et que les valeurs de ces propriétés peuvent varier selon la partition considérée. Serait-il envisageable de séparer la difficulté d'un SMI en deux valeurs indépendantes, l'une liée plutôt à la partition et l'autre au mapping ? Cela permettrait de s'abstraire de telles dépendances pour avoir des mesures génériques. Concernant la difficulté, les résultats sont très extrêmes sur ces exemples. Mais ce n'est pas toujours le cas. Notamment, le mode de jeu dit "rythmique" étudié en [5]³ sur les deux premières mesures du Scherzo présente des difficultés très différentes selon qu'il est joué au moyen d'une ou deux touches. En effet, pour cet exemple une difficulté nulle est obtenue avec une seule touche, alors que deux touches non génériques impliquent une difficulté de 7/8 sur l'extrait étudié.

5. CONCLUSION

Dans cet article nous avons étudié le Metapiano et le MidifilePerformer dans l'objectif de modéliser algébriquement leur fonctionnement. Il est apparu que l'expressivité de ces deux SMI réside principalement dans le traitement des suspensions. Leur fonctionnement permet d'exécuter des articulations diverses qui peuvent conduire l'interprète à jouer une exécution parfaite selon les consignes de la partition ou bien s'en éloigner à sa guise à l'intérieur des espaces d'exécution ouverts par ces SMI. Ces espaces sont bien sûr plus restreints que celui qui est accessible par un véritable piano, car un piano permettrait aussi de permuter les débuts des notes, voire de ne pas respecter du tout les notes de la partition, ce qui donnerait lieu à un nombre énorme de possibilités. En ce sens, ces SMI s'adressent aux virtuoses de par la finesse d'exécution des articulations mais aussi aux débutants voire aux personnes en situation de handicap car les gestes de sélection des touches dans la tessiture du clavier ont été éliminés [3].

Les modélisations du Metapiano et du MidifilePerformer diffèrent en somme assez peu. Si celle du Metapiano est purement temporelle, il a fallu introduire un peu d'espace dans celle du MidifilePerformer pour repérer les touches enfoncées. En effet, les touches du Metapiano sont génériques, seule la position temporelle d'une action sur une touche est utilisée. Alors que pour le MidifilePerformer, les touches enfoncées doivent être indicées pour pouvoir associer les relâchements aux enfoncements. Ces indices ajoutent un peu d'information spatiale au SMI.

Les perspectives de ce travail comprennent notamment l'indexation de la partition interactive en voix pour le jeu à plusieurs. Pour le MidifilePerformer, il faut pouvoir modifier les canaux du fichier MIDI si ceux-ci ne conviennent pas. Enfin, pour permettre de jouer une seule voix alors que le système joue les autres, il faut introduire une extraction de tempo du jeu de l'interprète pour que le système s'adapte à la vitesse d'exécution à la manière d'un suiveur de partition [7].

Il conviendrait aussi par la suite d'étudier les impossibilités de synchronisation du jeu pianistique pour les mo-

déliser et éviter ainsi les synchronisations exactes synthétiques.

Remerciements : Cette recherche s'est déroulée dans le cadre du SCRIME de l'Université de Bordeaux (Studio de Création et de Recherche en Informatique et en Musique Expérimentale) et financée par le ministère français de la culture. Les auteurs tiennent à remercier Mireille Bousquet-Mélou pour son aide précieuse dans l'énumération des espaces d'exécution.

Références

- [1] J. F. ALLEN. "Maintaining knowledge about temporal intervals". In : *Communications of the ACM* 26.11 (1983), p. 832-843.
- [2] A. BACHER. "Generalized Dyck paths of bounded height". In : <https://arxiv.org/pdf/1303.2724.pdf> (2013).
- [3] C. CADOZ. "Le geste canal de communication homme/machine : la communication "instrumentale"". In : *Revue des Sciences et Technologies de l'Information - Série TSI : Technique et Science Informatiques* 13.1 (1994), p. 31-61.
- [4] J. CHABASSIER et al. "MidifilePerformer : a case study for chronologies". In : *FARM 2021*. 2021, p. 13-22.
- [5] M. DESAINTE-CATHERINE et al. "Algebraic Framework for Design and Qualitative Evaluation of Interactive Musical Systems Temporality". In : *Sound and Music Computing*. 2022, p. 247-254.
- [6] I. A. DURAND et S. R. SCHWER. "A Tool For Reasoning about Qualitative Temporal Information : the Theory of S-languages with a Lisp Implementation". In : *Journal of Universal Computer Science* 14 (20) (2008), p. 3282-3306.
- [7] J-L GIAVITTO et al. "Time, Timelines and Temporal Scopes in the Antescofo DSL v1. 0". In : *International Computer Music Conference (ICMC)*. 2017.
- [8] J. HAURY. "Un répertoire pour un clavier de deux touches. Théorie, notation et application musicale". In : *Document numérique, URL :https://www.cairn.info/revue-document-numerique-2008-3-page-127.htm* 11 (2008), p. 127-148.
- [9] D. LEWIN. *Generalized Musical Intervals and Transformations*. Yale University Press, 1997.
- [10] G. MAZZOLA, S. GÖLER et S. MÜLLER. *The Topos of Music, Geometric logic of Concepts, Theory and Performance*. Birkhaus Verlag, 2005.
- [11] A. TARSKI. "On the Calculus of relations". In : *The journal of Symbolic logic* 6.3 (1941), p. 73-89.
- [12] N. WIENER. "A contribution to the theory of relative position". In : *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 17 (1914), p. 441-449.

3. Il s'agit d'un mode où seuls les débuts des notes sont interactifs.